УДК 621.391:517.518:510.52

О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер
Українська-інженерно-педагогічна академія
Україна, м. Харків, 61003, вул. Університетська, 16

Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліномінальної інтерлінації

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
Ukraine, 61003, Kharkiv, Universytetska St., 16

Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillatory Functions with Use of the Lagrange Polynomial Interlineation

О.Н. Литвин, О.П. Нечуйвитер
Украинская инженерно-педагогическая академия
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16

Приближенное вычисление двойных интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием лагранжевой полиномиальной интерлинации

У статті досліджуються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації на класі диференційовних функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих. Отримані оцінки похибки наближення.
Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних, кубатурні формули, лагранжева поліноміальна інтерлінація функцій.

Cubature formulas of approximate calculation of ddouble integrals of highly oscillatory functionswith use the Lagrange polynomial interlineation of functions at the class of differentiable functions are investigated in the article. Information about function is set of values on the optimal perpendicular lines. The estimations of error of approaching to the cubature formulas are presented.
Key Words: integrals of highly oscillatory functions, cubature formulas, Lagrange polynomial interlineation of functions.

В статье исследуются кубатурные формулы приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций двух переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерлинации на классе дифференцируемых функций. Информация о функции задана её следами на системе оптимально выбранных взаимно перпендикулярных линий. Получены оценки погрешности кубатурных формул.
Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций двух переменных, кубатурные формулы, лагранжевая полиномиальная интерлинация функций.

Вступ

Задача наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій є однією з найбільш важливих задач цифрової обробки сигналів. На даний час виникає необхідність наближеного обчислення таких інтегралів за допомогою

інформаційних операторів різних типів. Як дані можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функцій на системі взаємно перпендикулярних ліній тощо. Таку задачу ефективно дозволяє розв’язувати апарат інтерлінації функцій [1], [2]. В [3] вперше розглядалась задача наближеного обчислення інтегралів від шидкоосцилюючих функцій у випадку, коли інформація про функцію задана значеннями у вузлових точках, а в [4], [5] представлена задача наближеного обчислення 2D-коефіцієнтів Фур’є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про $f(x,y)$ задається слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих. Більш детально з такими кубатурними формулами, а також з їх тестуванням, можна познайомитись в [6], [7].

Мета даної статті – дослідити питання оптимального вибору вузлів та ліній для запропонованих кубатурних формул.

В [8] вперше було згадано про обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій як повторних, з оптимальним вибором, вузлів. Питання побудови кубатурних формул для наближення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$, задана слідами на системі оптимально вибраних взаємно перпендикулярних прямих, розглядається в даній статті вперше.

Постановка задачі: побудувати кубатурну формулу наближеного обчислення інтеграла

$$I(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)\sin\omega x_1 \sin\omega x_2 dx_1 dx_2$$

з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій на класі дійсних функцій, визначених на $G=[-1,1]^2$, і таких, що $\left|f^{(p_1,p_2)}(x,y)\right|\le M$. Отримати оцінку похибки кубатурної формули.

1 Найкраща в $L_q[-1,1]^2$, $q=\infty,1,2$ лагранжева поліноміальна інтерлінація. Наведемо деякі теореми.

Теорема 1. [2] Нехай $g(t)\in C^r(I)$, $I=[0,1]$, $1\le r\le n$, $L_{n-1}g(t)-$ інтерполяційний поліном Лагранжа степеня $n-1$ функції $g(t)$,

$$L_{n-1}g(t)=\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\ell_{n-1,k}(t),\quad \ell_{n-1,k}(t)=\prod_{i=1,i\ne k}^{n}\frac{t-t_i}{t_k-t_i}, k=\overline{1,n}$$

із властивостями

$$L_{n-1}g(t_k)=g(t_k), k=\overline{1,n},\quad -\infty<a\le t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n\le b<\infty.$$

Тоді для залишку $R_n g(t):=g(t)-L_{n-1}g(t)$ справедливе інтегральне зображення

$$R_n g(t)=\sum_{k=1}^{n}\ell_{n-1,k}(t)\int_{t_k}^{t} g^{(r)}(\tau)\frac{(t_k-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}d\tau .$$

При знаходженні найкращої в $L_q[-1,1]^2$, $q=\infty,1,2$ лагранжевої поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих слід враховувати, що:

1) залишок наближення інтерлінації дорівнює операторному добуткові залишків по кожній змінній окремо;

2) поліноми степеня n з найменшим відхиленням від нуля в метриці $L_q[-1,1]$ – це поліноми з коефіцієнтом одиниця при старшому степені, що є розв’язанням екстремальної задачі

$$\max_{t\in[-1,1]}\left|t^n-\sum_{k=0}^{n-1}c_kt^k\right|\to\min_{c_0,\ldots,c_{n-1}},\ q=\infty,$$

$$\int_{-1}^{1}\left|t^n-\sum_{k=0}^{n-1}c_kt^k\right|^q dt\to\min_{c_0,\ldots,c_{n-1}},\ 1\le q<\infty.$$

Для них справедлива наступна теорема.

Теорема 2. [9] При $q=\infty,1,2$ поліномами найкращого наближення є відповідно поліноми Чебишова 1-го роду

$$T_{n,\Gamma}(t)=\frac{\cos(n\times\arccos t)}{2^{n-1}},$$

поліноми Чебишова 2-го роду

$$T_{n,1}(t)=\frac{sin\left((n+1)arccost\right)}{2^n\sqrt{1-t^2}},$$

поліноми Лежандра

$$T_{n,2}(t)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

Це означає, що при побудові поліноміальних інтерлінантів треба вибирати прямі інтерлінації $x=x_i,\ i=\overline{1,m};\quad y=y_j,\ j=\overline{1,n}$ так, щоб числа $x_i,\ i=\overline{1,m};\quad y_j,\ j=\overline{1,n}$ були коренями відповідних поліномів з найменшим відхиленням. Зокрема, при $q=1$ справедлива наступна теорема.

Теорема 3. [10] Нехай $p=(p_1,p_2),\ f(x_1,x_2)\in C^p(J^2),\ J=[-1,1],\quad D^p=\dfrac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}},$ $B^p=\left\{g(x)\mid g\in C^p(J^2),D^pg=0\right\}$, $E(f)$ – величина найкращого наближення функції f множиною B^p за нормою $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_1(J^2)}$; $g^*\in B^p$ – елемент найкращого наближення; $x_{1i_1}=\cos(i_1\pi/(p_1+1)),\quad i_1=\overline{1,p_1}$, $x_{2i_2}=\cos(i_2\pi/(p_2+1)), i_2=\overline{1,p_2}$ – нулі поліномів U_{p_1},U_{p_2} Чебишова 2-го роду відповідно степеня p_1 та p_2:

$$U_m(t)=\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},\quad \cos\theta=t,\quad m=0,1,\ldots,$$

$l_{kp_ki_k}$ – базисні поліноми Лагранжа, $l_{kp_ki_k}(x_{ki'_k})=\delta_{i_ki'_k}$,

$$g^*(x)=\sum_{i_1=1}^{p_1}f(x_{1i_1},x_2)l_{1p_1i_1}(x_1)+\sum_{i_2=1}^{p_2}f(x_1,x_{2i_2})l_{2p_2i_2}(x_2)-\qquad(1)$$
$$-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}f(x_{1i_1},x_{2i_2})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2).$$

Для $f(x)$ існує єдиний, найближчий до $f(x)$ за нормою $\|\cdot\|$, елемент $g^*\in B^p$ і цей елемент має вигляд (1), тобто є інтерлінантом, який інтерлінує $f(x)$ на лініях $x_k=x_{ki_k},\quad i_k=\overline{1,p_k};\quad k=1,2.$

Залишок наближення функції $f(x)$ найкращим елементом має наступний вид.

$$f(x)-g^*(x)=\frac{U_{p_1}(x_1)U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}f^{(p_1,p_2)}(\xi_1,\xi_2),\ (\xi_1,\xi_2)\in J^2,\qquad(2)$$

де (ξ_1,ξ_2) – деяка точка, що залежить від $(x_1,x_2)\in J^2$. Тому найменше значення величини $\| f(x)-g^*(x)\|$ досягається на тих g^*, для яких величина $\|\prod_{k=1}^{2}\prod_{i_k=1}^{p_k}(x_k-x_{ki_k})\|$ є найменшою. Цю умову задовольняють поліноми, вузли яких є нулями поліномів Чебишова 2-го роду.

2 Обчислення інтеграла від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій. Для наближеного обчислення інтеграла

$$I(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2)\sin\omega x_1\sin\omega x_2 dx_1dx_2$$

пропонується кубатурна формула

$$\tilde I(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Lf(x_1,x_2)\sin\omega x_1\sin\omega x_2 dx_1dx_2,$$

де

$$Lf(x_1,x_2)=\sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1i_1},x_2)l_{1p_1i_1}(x_1)+\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1,x_{2i_2})l_{2p_2i_2}(x_2)-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1},x_{2i_2})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2).$$

В розгорнутому вигляді кубатурна формула має вид:

$$\tilde I(f,\omega)=\sum_{i_1=1}^{p_1}\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} l_{1p_1i_1}(x_1)\sin\omega x_1dx_1\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} f(x_{1i_1},x_2)\sin\omega x_2dx_2+$$

$$+\sum_{i_2=1}^{p_2}\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} l_{2p_2i_2}(x_2)\sin\omega x_2dx_2\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} f(x_1,x_{2i_2})\sin\omega x_1dx_1-$$

$$-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1},x_{2i_2})\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} l_{1p_1i_1}(x_1)\sin\omega x_1dx_1\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} l_{2p_2i_2}(x_2)\sin\omega x_2dx_2.$$

Теорема 4. Справедлива наступна оцінка похибки наближення інтеграла $I(f,\omega)$ кубатурною формулою $\tilde I(f,\omega)$

$$\left|I(f,\omega)-\tilde I(f,\omega)\right|\le\frac{Mp_1p_2\pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}.$$

Доведення. Знайдемо оцінку похибки наближення. Маємо

$$\left|I(f,\omega)-\tilde I(f,\omega)\right|\le\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|f(x_1,x_2)-Lf(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\left|\frac{U_{p_1}(x_1)U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}f^{(p_1,p_2)}(\xi_1,\xi_2)\right|dx_1dx_2\le$$

$$\le M\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\frac{\left|U_{p_1}(x_1)\right|\left|U_{p_2}(x_2)\right|}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}dx_1dx_2=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\left|U_{p_1}(x_1)\right|dx_1\int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\left|U_{p_2}(x_2)\right|dx_2=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\left|\frac{\sin\left(\left(p_1+1\right)\arccos x_1\right)}{\sqrt{1-x_1^2}}\right|dx_1\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\left|\frac{\sin\left(\left(p_2+1\right)\arccos x_2\right)}{\sqrt{1-x_2^2}}\right|dx_2\le$$

$$\le\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}}=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x_1\right)\Bigg|_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x_2\right)\Bigg|_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\arccos x_{1i_1}-\arccos x_{1i_1+1}\right)\left(\arccos x_{2i_2}-\arccos x_{2i_2+1}\right)=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\frac{\pi i_1}{p_1+1}-\frac{\pi\left(i_1+1\right)}{p_1+1}\right)\left(\frac{\pi i_2}{p_2+1}-\frac{\pi\left(i_2+1\right)}{p_2+1}\right)=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}\,p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\frac{\pi}{p_1+1}\frac{\pi}{p_2+1}=\frac{Mp_1p_2\pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}.$$

Теорема доведена.

3 Чисельний експеримент. Для функції $f\left(x_1,x_2\right)=\cos\left(x_1+x_2\right)$, у якої $\left|f^{(p_1,p_2)}(x,y)\right|\le 1$, наведені в табл. 1 наближені значення інтегралів $I\left(f,\omega\right)$ за кубатурною формулою $\tilde{I}\left(f,\omega\right)$ для різних значень $p_1=p_2$ та $\omega=\pi m$, $m=1,2,\ldots$.

Таблиця 1 – Обчислення $I\left(f,\omega\right)$ за кубатурною формулою $\tilde{I}\left(f,\omega\right)$

ω	p_1	p_2	$\tilde{I}\left(f,\omega\right)$	$\left\lvert I\left(f,\omega\right)-\tilde{I}\left(f,\omega\right)\right\rvert$	ε
3π	6	4	-0.032615945938263	0.000000000292593	0.000000382471649
		6	-0.032615946229612	0.000000000001244	0.000000003414925
		8	-0.032615946230859	0.000000000000003	0.00000000001581
		9	-0.032615946230853	0.000000000000003	0.000000000000889
		10	-0.032615946230856	0	0.000000000000045
3π	7	4	-0.032615945817734	0.000000000413122	0.00000027888558
		6	-0.0326159462291	0.000000000001756	0.000000000249005
		8	-0.032615946230861	0.000000000000004	0.000000000001153
		9	-0.032615946230852	0.000000000000003	0.000000000000065
		10	-0.032615946230856	0	0.000000000000003
3π	8	4	-0.03261594623163	0.000000000000774	0.000000001770702
		6	-0.032615946230859	0.000000000000003	0.00000000001581
		8	-0.032615946230856	0	0.000000000000073
4π	6	6	-0.018165043732214	0.000000000000182	0.000000003414925
	7	7	-0.018165043732261	0.000000000000135	0.000000000018157
	8	8	-0.018165043732396	0	0.000000000000073

Нехай $\varepsilon=\dfrac{p_1p_2\pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}$. Наведемо точні значення інтегралів:

$$I\left(f,3\pi\right)=-0.032615946230856;\quad I\left(f,4\pi\right)=-0.018165043732396.$$

Висновки

Побудована кубатурна формула наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій на класі дійсних функцій, визначених на $G=\left[-1,1\right]^2$, і таких, що $\left|f^{(p_1,p_2)}(x,y)\right|\le M$. Отримана оцінка похибки кубатурної формули. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Література

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / Литвин О.М. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи : [навчальний посібник] / Литвин О.М. – К. : Наукова думка, 2005. – 331 с.
3. Литвин О.М. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур’є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Доповіді НАН України. – 1998 р. – Київ. – № 1. – С. 23-28.
4. Литвин О.М. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Доповіді НАН України. – 2006 р. – Київ. – № 6. – С. 9-13.
5. Lytvyn Oleg N. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation / Oleg N. Lytvyn, Olesya P. Nechuyviter // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90-96.
6. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / [Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П.]. – Київ : Наукова думка, 2011. – Т. 1 : Алгоритми. – 2011. – 447 с.
7. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / [Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П.]. – Київ : Наукова думка, 2011. – Т. 2 : Застосування. – 2011. – 348 с.
8. Бахвалов Н.С. Вычисление интегралов от осцилирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратур Гаусса / Н.С. Бахвалов, Л.Г. Васильева // ЖВМ и МФ. – 1968. – № 1. – С. 175-181.
9. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / Тихомиров В.М. – М. : МГУ, 1976. – 304 с.
10. Haussmann W. Blending interpolation and the best L^1- approximation / W. Haussmann, K. Zeller // Arch. Math. (Basel). – 1983. – Vol. 40, № 6. – P. 545-552.

Literatura

1. Lytvyn O.M. Interlinacija funkcij ta dejaki ii zastosuvannja. Harkiv: Osnova. 2002. 544 s.
2. Lytvyn O.M. Metody obchyslen’. Dodatkovi rozdily. Navchal’nyj posibnik. K.: Naukova dumka. 2005. 331s.
3. Lytvyn O.M. Dopovidi NAN Ukrainy. Kyiv. № 1. 1998. S. 23-28.
4. Lytvyn O.M. Dopovidi NAN Ukrainy. Kyiv. № 6. 2006. S. 9-13.
5. Lytvyn Oleg N. Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). Novosibirsk. 2010. P. 90-96.
6. Sergijenko I.V. Optymal’ni algorytmy obchyslennja integraliv vid shvydkooscyljujuchih funkcij ta ih zastosuvannja. T. 1. Algorytmy. Kyiv: Naukova dumka. 2011. 447 s.
7. Sergijenko I.V., Optymal’ni algorytmy obchyslennja integraliv vid shvydkooscyljujuchih funkcij ta ih zastosuvannja. T. 2. Algorytmy. Kyiv: Naukova dumka. 2011. 348 s.
8. Bahvalov N.S. ZhVM i MF. 1968.-8. №1.S.175-181.
9. Tihomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij. M.: MGU. 1976. 304 s.
10. Haussmann W. Arch. Math. (Basel). 1983. Vol. 40. № 6. P. 545-552.

O.N. Lytvyn, O.P. Nechuiviter

Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillatory Functions with Use of the Lagrange Polynomial Interlineation

Modern problems of digital signal processing need the solutions with new forms of data. It means that information about function is set of values on the set of flats or set of lines or set of knots. The theory of interlineations and interflatation of functions is the most effective in this case.

In the work, cubature formulas of approximate calculation of ddouble integrals of highly oscillatory functionswith use the Lagrange polynomial interlineation of functions at the class of differentiable functions are investigated in the article. Information about function is set of values on the optimal perpendicular lines. The estimations of error of approaching to the cubature formulas are presented.

Стаття надійшла до редакції 25.01.2012.